Formule sommatoire de Poisson et formule de Shannon

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
— 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.
— 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors pour tout réel t, on a*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

Preuve :

Étape 1 : Montrons la convergence de $\varphi : x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$ et de sa dérivée sur tout compact

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ inclus dans un intervalle de la forme $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha > 0$.
Comme $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, il existe $a > 0$ tel que $|x^2 f(x)| \leq 1$ pour $|x| \geq a$, pour $|x| \leq \alpha$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $|x+2k\pi| \geq |2k\pi| - |x| \geq 2|k|\pi - \alpha$ d'où $|x+2k\pi| \geq a$ si $|k| \geq \frac{\alpha+a}{2\pi}$.
Pour $|k| \geq \frac{\alpha+a}{2\pi}$, $f(x+2k\pi) \leq \frac{1}{(x+2k\pi)^2} \leq \frac{1}{(2|k|\pi-\alpha)^2}$.
Comme $\sum \dfrac{1}{(2|k|\pi-\alpha)^2}$ est convergente, la série $\sum f(\cdot+2k\pi)$ converge uniformément sur $[-\alpha,\alpha]$.
De plus, f' vérifie la même hypothèse que f d'où $\sum f'(\cdot+2k\pi)$ converge uniformément sur tout intervalle $[-\alpha,\alpha]$.
Par théorème de dérivation des série de fonctions, $\varphi : x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$ est de classe C^1 sur $[-\alpha,\alpha]$.

Étape 2 : Développons φ en série de Fourier

Comme φ est $2\pi-$périodique, notons $c_n(\varphi)$ ses coefficients de Fourier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned}
c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(x+2k\pi)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \quad \text{par convergence uniforme} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)e^{-inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-inx} \quad \text{l'intégrale a un sens car } |f(x)e^{-inx}| = |f(x)| = o(\frac{1}{x^2}) \text{ au voisinage de } \pm\infty
\end{aligned}$$

Comme φ est $\mathcal{C}^1$ est $2\pi-$périodique, le théorème de convergence normale de Dirichlet assure que pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\right) e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

□

Théorème. *Supposons que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-F, F]$ avec $F \in \mathbb{R}^{+*}$.*
Si $0 \leq F \leq \pi$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}$$

Preuve : En appliquant la formule sommatoire de Poisson à $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ (car $f \in S(\mathbb{R})$), on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\hat{f}}(n)e^{in\xi}$$

Or, par formule d'inversion de Fourier, $\hat{\hat{f}}(n) = 2\pi f(-n)$. D'où

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{in\xi}$$

Comme $2F \leq 2\pi$, on a pour tout k non nul, $\hat{f}(2k\pi + .)$ est nul en dehors de $[-\pi, \pi]$ donc :

$$\hat{f} = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2k\pi + .) = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{in\bullet}$$

Et en ré-appliquant la formule d'inversion de Fourier, on a

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi)\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{in\xi}\right) e^{i\xi t}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n)e^{i\xi(t+n)}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m)e^{i\xi(t-m)}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)e^{i\xi(t-m)}$ converge absolument donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$ car

$$\forall m \in \mathbb{Z}, ||f(m)e^{i\cdot(t-m)}||_\infty = |f(m)| \text{ et } \sum |f(m)| \text{ converge}$$

D'où

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(t-m)}\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) \times \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\xi(t-m)}}{i(t-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) \times \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\pi(t-m))}{i(t-m)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}
\end{aligned}$$

□

Application (Équation fonctionnelle de Θ)**.** *Soit Θ la fonction de Jacobi définit par*

$$\begin{array}{rcccc} \Theta & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} \end{array}$$

On a

$$\forall x > 0, \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

Preuve : En appliquant la formule sommatoire de Poisson à $f : t \mapsto e^{-\alpha t^2} \in S(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier $\widehat{f} : t \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$. On a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha(t+2k\pi)^2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} e^{int}$$

Donc en évaluant en 0,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-4k^2\pi^2\alpha} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

Avec $x = 2\alpha\pi$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi k^2}{x}}$$

D'où le résultat. □

Références

[1] Julien Bernis et Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements.* Ellipses, 2018.